KIT-Fakultät für Informatik
Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour

Musterlösungen zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 24. Juli 2018, 14:00 – 15:00 Uhr

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:
Denavit	Hartenberg	$\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 1	von 5 Punkten
Aufgabe 2	von 7 Punkten
Aufgabe 3	von 7 Punkten
Aufgabe 4	von 7 Punkten
Aufgabe 5	von 7 Punkten
Aufgabe 6	von 6 Punkten
Aufgabe 7	von 6 Punkten

Gesamtpunktzahl:	45 von 45 Punkten

	Note: **1,0**

Aufgabe 1 *Quaternionen*

1. Multiplikation von Quaternionen kommutativ? $\boxed{\text{1 P.}}$

   Nein, da $i \cdot j = -j \cdot i \neq j \cdot i$.

2. Abgeschlossenheit der Einheitsquaternionen $\boxed{\text{2 P.}}$

$$\mathbb{S}^3 = \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{H} \mid \|\boldsymbol{q}\| = 1\}$$

   Seien $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{S}^3$. Aus der Abgeschlossenheit der Quaternionen $\mathbb{H}$ folgt, dass $\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{H}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2\|^2 &= (\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2) \cdot (\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^* \\
&= \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^* \\
&= \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*)\boldsymbol{q}_1^* \\
&= \boldsymbol{q}_1\|\boldsymbol{q}_2\|^2\boldsymbol{q}_1^* \\
&= \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^* \cdot \|\boldsymbol{q}_2\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{q}_1\|^2 \cdot \|\boldsymbol{q}_2\|^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Rotationswinkel und -achse für $\boldsymbol{q} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ $\boxed{\text{2 P.}}$

   $\mathbf{q} = (cos(\frac{\theta}{2}), \mathbf{u} \cdot sin(\frac{\theta}{2}))$
   Für $\theta = \pi$ (bzw. $\theta = 180°$) gelten $\cos\frac{\theta}{2} = 0$ und $\sin\frac{\theta}{2} = 1$. Damit sind $\boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ und $\theta = \pi$ eine mögliche Lösung.

   Für $\theta = -\pi$ (bzw. $\theta = -180°$) ergibt sich eine weitere Lösung mit $\boldsymbol{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ und $\theta = -\pi$.

Aufgabe 2 *Kinematik*

1. DH-Parameter: 1 P.

Gelenk	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	L_1	$0°$
2	θ_2	0	L_2	$0°$

2. Vorwärtskinematik: 2 P.

$$f(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1\,cos\theta_1 + L_2\,cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1\,sin\theta_1 + L_2\,sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}$$

3. Jacobi-Matrix: 4 P.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1\,sin\theta_1 - L_2\,sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2\,sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1\,cos\theta_1 + L_2\,cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2\,cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 *Regelung*

1. Vervollständigen Sie die Tabelle: 2 P.

Bezeichnung im System	**Bezeichnung im Blockschaltbild**
Regler	Block 1
Vorgabe für den Motorstrom	**w**
Gemessener Motorstrom	**x**
Eingestellte Ankerspannung	**y**
Motor	**Block 2**
Rückführgröße	**r**
Differenz zwischen Vorgabe und Messung des Motorstroms	$\mathbf{x_d}$

2. (a) Gleichung im Frequenzbereich: 1 P.

$U_A(s) = R_A \cdot I_A(s) + s \cdot L_A \cdot I_A(s)$

(b) Übertragungsfunktion im Frequenzbereich: 2 P.

$$\frac{I_A(s)}{U_A(s)} = \frac{I_A(s)}{I_A(s) \cdot (R_A + s \cdot L_A)} = \frac{1}{R_A + s \cdot L_A}$$

(c) Gleichungen für den PD-Regler im Zeit- und Frequenzbereich: 2 P.

- $u(t) = K_p \cdot e(t) + K_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)$
- $U(s) = K_p \cdot E(s) + K_d \cdot s \cdot E(s)$

Aufgabe 4 *Bewegungsplanung mit RRT**

1. Pfadkosten: 2 P.

   - $Cost(q1) = 0$
   - $Cost(q2) = Cost(q1) + Cost(q1, q2) = 0 + \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5} \approx 2.236$
   - $Cost(q3) = Cost(q1) + Cost(q1, q3) = 0 + 2 = 2$
   - $Cost(q4) = Cost(q3) + Cost(q3, q4) = 2 + 2 = 4$
   - $Cost(q5) = Cost(q4) + Cost(q4, q5) = 4 + 2 = 6$
   - $Cost(q6) = Cost(q5) + Cost(q5, q6) = 6 + 2 = 8$
   - $Cost(q7) = Cost(q5) + Cost(q5, q7) = 6 + \sqrt{2^2 + 1^2} = 6 + \sqrt{5} \approx 8.236$

2. (a) q_{nn} und q_{new}: 1 P.

   $q_{nn} = q6$

   q_{new} Position: $(1, 1)$

   Da die Entfernung zu $qs > d = 2$ ist, wird q_{new} auf der Verbindung von $q6$ zu qs mit Abstand $d = 2$ von $q6$ platziert.

   (b) Knoten im Rewire-Schritt: 1 P.

   Alle Knoten mit Abstand kleiner als $r = 3$ werden betrachtet:
   $Q_{\text{near}} = \{q2, q6, q7\}$

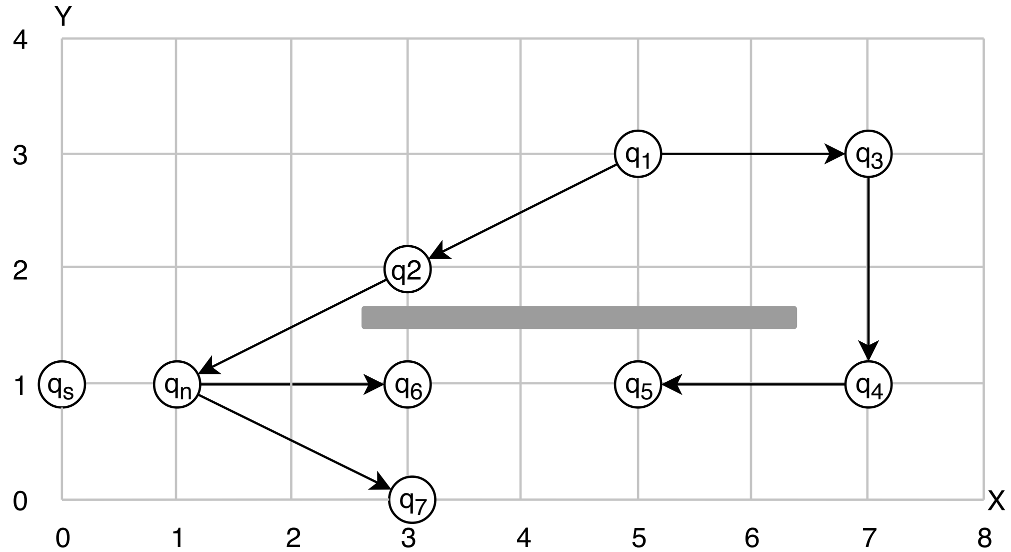
   (c) Neuer Baum: 3 P.

   Kanten zwischen $q1 - q5$ bleiben unverändert (nicht im Rewiring-Radius).

   q_{new} erhält $q2$ als Elternknoten, da die Kosten von $q6$ und $q7$ zu hoch sind.

   $q6$ und $q7$ werden im Rewiring-Schritt mit q_{new} als Elternknoten verbunden, da der Pfad kürzer ist, als der bisherige.

   qs muss nicht angegeben werden.


Y
X
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
qs
qn

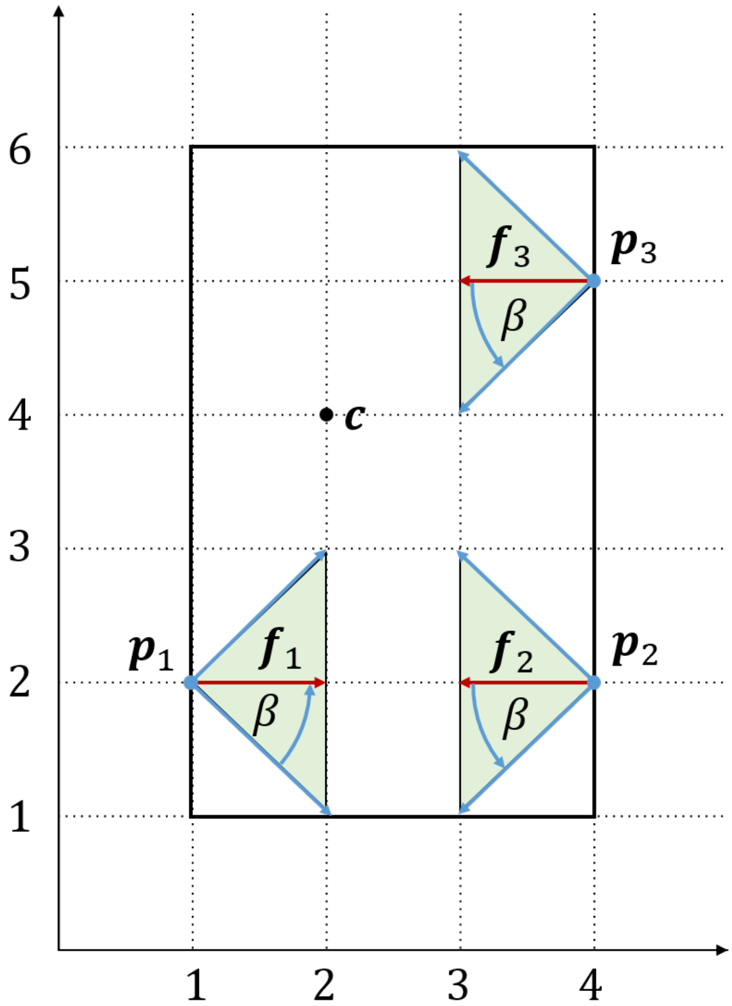
Aufgabe 5 *Greifplanung*

1. Öffnungswinkel β: 1 P.

   Alternative Lösungswege:

   - $\beta = \arctan(\mu) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45°$
   - $\tan(\beta) = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} = 45°$
   - Geometrische Herleitung (Tangential- = Normalkraft): 45°

2. Reibungsdreiecke: 2 P.



3. Berechnung der Wrenches: 4 P.

   Hinweis: Die beiden Wrenches pro Kontaktpunkt ($w_{a,i}$ und $w_{b,i}$) haben keine bestimmte Reihenfolge und können in der Lösung auch vertauscht werden.

   - Kontakt $i = 1$: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

     Reibungskraft: $f_{R,1} = \mu \cdot f_{\perp,1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

     $\mathbf{f}_{a,1} = f_1 + f_{R,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

     $\mathbf{f}_{b,1} = f_1 - f_{R,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

     $\tau_{a,1} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_{a,1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
     $(-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 1$

     $\tau_{b,1} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_{b,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 3$

     $w_{a,1} = (\mathbf{f}_{a,1}, \tau_{a,1}) = (1, 1, 1)$
     $w_{b,1} = (\mathbf{f}_{b,1}, \tau_{b,1}) = (1, -1, 3)$

   - Kontakt $i = 2$: $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

     Reibungskraft: $f_{R,2} = \mu \cdot f_{\perp,2} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

     $\mathbf{f}_{a,2} = f_2 + f_{R,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

     $\mathbf{f}_{b,2} = f_2 - f_{R,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

     $\tau_{a,2} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_{a,2} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$
     $2 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) = -4$

     $\tau_{b,2} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_{b,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) = 0$

     $w_{a,2} = (\mathbf{f}_{a,2}, \tau_{a,2}) = (-1, -1, -4)$
     $w_{b,2} = (\mathbf{f}_{b,2}, \tau_{b,2}) = (-1, 1, 0)$

Aufgabe 6 *Bildverarbeitung*

1. Bildpunkt: 1 P.

   Formel:

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

   Werte einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 200 & 0 & 320 \\ 0 & 200 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \cdot 200 + 0 \cdot 200 + 320 \cdot 1000 \\ 0 \cdot 200 + 200 \cdot 200 + 240 \cdot 1000 \\ 0 \cdot 200 + 0 \cdot 200 + 1 \cdot 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360000 \\ 280000 \\ 1000 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 280 \end{pmatrix}$$

2. Mathematische Eigenschaften eines linearen Filters:

   - Additivität: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
   - Homogenität: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

3. Verschiebungsfilter: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Ergebnis der Laplace-Filterung: 3 P.

   Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Alternativer Filter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 *Symbolisches Planen*

1. Ist `pickup(B,C)` ausführbar? 2 P.

   Nein, da die Vorbedingung `Clear(B)` nicht erfüllt ist.

   Anschaulich bedeutet dies, dass Block `B` nicht gegriffen werden kann, weil Block `A` auf `B` steht.

2. Planungsoperator `pickupAndPutdown(X, Y, Z)`: 2 P.

```
pickupAndPutdown(X, Y, Z):
Preconditions:
    Clear(X), On(X,Y), HandEmpty, Clear(Z)

Effects:
     !Clear(Z), !On(X,Y), Clear(Y), On(X,Z)
```

3. Notwendige STRIPS-Erweiterung: 2 P.

   Zwei alternative Antworten:

   - Es muss die Möglichkeit geben, Disjunktionen im Zielzustand anzugeben.
   - Es muss die Möglichkeit geben, den Existenz-Quantor im Zielzustand anzugeben.